Seri bahan kuliah Algeo #23

Perkalian Geometri

(Bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Perkalian Vektor

Perkalian vektor yang sudah dipelajari:

1. Perkalian titik (*dot product* atau *inner product*): $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. Perkalian silang (*cross product*): $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
3. Perkalian luar (*outer product*): $a \wedge b$

Yang akan dipelajari selanjutnya $\rightarrow$ perkalian geometri: ab

Perkalian Geometri

- Perkalian geometri dioperasikan pada *multivector* yang mengandung skalar, area, dan volume
- Perkalian geometri ditemukan oleh William Kingdom Clifford (1945 – 1879)

- Perkalian geometri dua buah vektor *a* dan *b* didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{ab = \underbrace{a \cdot b}_{\text{skalar}} + \underbrace{a \wedge b}_{\text{bivector}}}$$

Sifat-sifat Perkalian Geometri

1. Asosiatif

   (i) $a(bc) = (ab)c = abc$

   (ii) $(\lambda a)b = \lambda(ab) = \lambda ab$

2. Distributif

   (i) $a(b + c) = ab + ac$

   (ii) $(b + c)a = ba + ca$

3. Modulus

   $a^2 = aa = \|a\|^2$

- Bukti untuk 3:

  Misalkan $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$

  maka

$$
\begin{aligned}
a^2 = aa &= a \cdot a + a \wedge a \\
&= a_1 a_1 + a_2 a_2 + (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_1 (e_1 \wedge e_1) + a_1 a_2 (e_1 \wedge e_2) + a_2 a_1 (e_2 \wedge e_1) + a_2 a_2 (e_2 \wedge e_2) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + 0 + a_1 a_2 (e_1 \wedge e_2) + a_2 a_1 (e_2 \wedge e_1) + 0 \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e_1 \wedge e_2) - a_2 a_1 (e_1 \wedge e_2) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e_1 \wedge e_2) - a_1 a_2 (e_1 \wedge e_2) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + 0 \\
&= a_1^2 + a_2^2 \\
&= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 \\
&= \|a\|^2
\end{aligned}
$$

Contoh 1: Misalkan $a = 3e_1 + 4e_2$ dan $b = 2e_1 + 5e_2$, hitunglah ab dan a^2

Jawaban:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$= \{(3)(2) + (4)(5)\} + (3e_1 + 4e_2)\wedge(2e_1 + 5e_2)$$

$$= \{6 + 20\} + 6(e_1 \wedge e_1) + 15(e_1 \wedge e_2) + 8(e_2 \wedge e_1) + 20(e_2 \wedge e_2)$$

$$= 26 + (6)(0) + 15(e_1 \wedge e_2) + 8(e_2 \wedge e_1) + (20)(0)$$

$$= 26 + 15(e_1 \wedge e_2) – 8(e_1 \wedge e_2)$$

$$= 26 + 7(e_1 \wedge e_2)$$

$$a^2 = aa = a \cdot a + a \wedge a = \|a\|^2$$

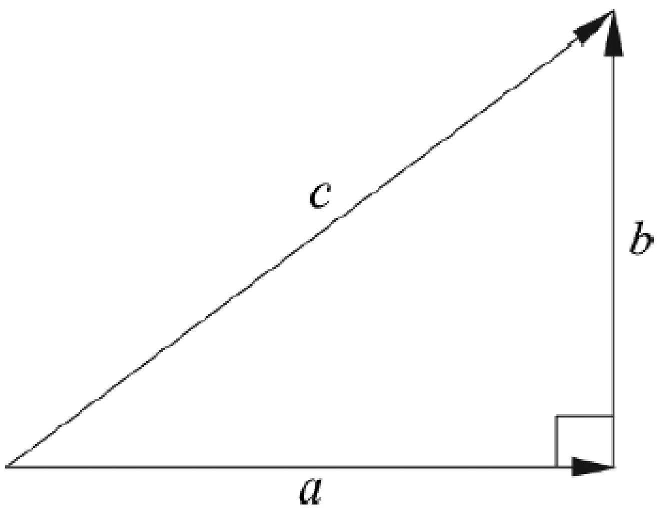
$$= (\sqrt{3^3 + 4^2})^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

Vektor-vektor Ortogonal



$$b \perp a$$

Menurut dalil Phytagoras:

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \text{sifat modulus}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

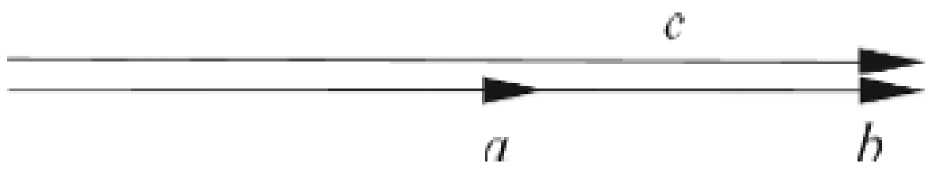
$$a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2$$

$$ab + ba = 0$$

$$ab = -ba$$

$\therefore$ Perkalian geometri tidak bersifat komutatif untuk vektor-vektor yang ortogonal!

Vektor-vektor yang tidak bebas linier



$$b \,//\, a$$

$$b = \lambda a \quad , \lambda \in R$$

$$ab = a\lambda a = \lambda aa = \lambda a^2 = \lambda\|a\|^2$$

$$ba = \lambda aa = \lambda a^2 = \lambda\|a\|^2$$

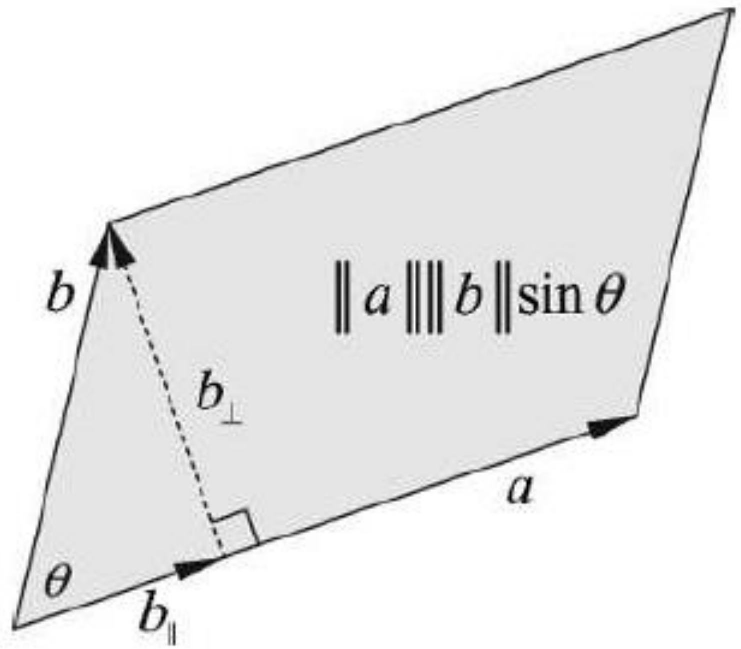
$$ab = ba$$

$\therefore$ Perkalian geometri bersifat komutatif untuk vektor-vektor tidak bebas linier

Vektor-vektor yang bebas linier

$$b = b_{\|} + b_{\perp}$$

$$ab = a(b_{\|} + b_{\perp}) = ab_{\|} + ab_{\perp}$$



$ab_{||}$ bergantungan linier dengan a, atau $b_{||} = \lambda a$

$ab_{||} = a\lambda a = \lambda a^2 = \lambda||a||^2$

skalar

$$\left.\begin{aligned} ab_{||} &= ab \cos\theta = ||a||\,||b|| \cos\theta = a \cdot b \\ ab_{\perp} &= ab \sin\theta = a \wedge b \end{aligned}\right\} \quad ab = ab_{||} + ab_{\perp} = a \cdot b + a \wedge b$$

Jadi, $ab = a \cdot b + a \wedge b$

- Modulus *ab* dihitung dengan dalil Phytagoras sbb:

$$
\begin{aligned}
\|ab\|^2 &= \|a \cdot b\|^2 + \|a \wedge b\|^2 \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\theta + \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 \qquad (\text{sebab } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$\boxed{\|ab\| = \|a\|\|b\|}$$

- Kemudian,

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$ba = b \cdot a + b \wedge a = a \cdot b - a \wedge b$$

$$\begin{aligned} ab - ba &= (a \cdot b + a \wedge b) - (a \cdot b - a \wedge b) \\ &= (a \wedge b) + (a \wedge b) = 2\,(a \wedge b) \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{(a \wedge b) = \frac{1}{2}(ab - ba)}$$

- Selanjutnya,

$$ab + ba = (a \cdot b + a \wedge b) + (a \cdot b - a \wedge b) = 2(a \cdot b\ )$$

Jadi,

$$\boxed{(a \cdot b\ ) = \frac{1}{2}(ab + ba)}$$

Perkalian geometri vektor-vektor basis

- Vektor-vektor basis satuan standard adalah e_1, e_2, e_3, …

$$e_1e_1 = e_1 \cdot e_1 + e_1 \wedge e_1 = 1 + 0 = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{e_1e_1 = e_1^2 = 1}$$

- Dengan cara yang sama, maka $\boxed{e_2e_2 = e_2^2 = 1}$ dan $\boxed{e_3e_3 = e_3^2 = 1}$

- Perkalian geometri e_1 dan e_2 :

$$e_1e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 = 0 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{e_1e_2 = e_1 \wedge e_2}$$

<u>Note</u>: $e_1 \wedge e_2$ dapat diganti dengan notasi e_1e_2 atau e_{12}

$$e_2e_1 = e_2 \cdot e_1 + e_2 \wedge e_1 = 0 + e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{e_2e_1 = -e_1 \wedge e_2}$$

<u>Note</u>: $e_2 \wedge e_1$ dapat diganti dengan notasi $-e_1e_2$ atau $-e_{12}$

Soal Latihan dan Jawaban

(Soal UAS 2019)

Jika diketahui tiga buah vektor:

$$
\begin{aligned}
a &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 \\
b &= 3e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\
c &= e_1 + 2e_2 - e_3
\end{aligned}
$$

Hitunglah :

1). $(a + b)c$ 2). $(a \wedge b)c$ 3). $(a + b) \cdot c$

1) $a + b = (2e_1 + 2e_2 + e_3) + (3e_1 + 2e_2 - 2e_3) = 5e_1 + 4e_2 - e_3$

$$\begin{aligned}(a + b)c &= (5e_1 + 4e_2 - e_3)(e_1 + 2e_2 - e_3)\\ &= 5 + 10e_{12} - 5e_{13} + 4e_{21} + 8 - 4e_{23} - e_{31} - 2e_{32} + 1\\ &= 14 + (10 - 4)e_{12} + (-4 + 2)e_{23} + (5 - 1)e_{31}\\ &= 14 + 6e_{12} - 2e_{23} + 4e_{31}\end{aligned}$$

2) $(a \wedge b) = (2e_1 + 2e_2 + e_3) \wedge (3e_1 + 2e_2 - 2e_3)$

$$\begin{aligned}&= (4 - 6)e_{12} + (-4 + 2)e_{23} + (3 + 4)e_{31}\\ &= -2e_{12} - 2e_{23} + 7e_{31}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \wedge b)c &= (-2e_{12} - 2e_{23} + 7e_{31})(e_1 + 2e_2 - e_3)\\ &= 2e_2 - 4e_1 + 2e_{123} - 2e_{123} + 4e_3 + e_2 + 7e_3 + 14e_{123} + 7e_1\\ &= (-4 + 7)e_1 + (2 + 1)e_2 + (4 + 7)e_3 + (2 - 2 + 14)e_{123}\\ &= 3e_1 + 3e_2 + 11e_3 + 14e_{123}\end{aligned}$$

$$3)\ (a + b) \cdot c = (5\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3) \cdot (\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3)$$

$$= (5)(1) + (4)(2) + (-1)(-1)$$

$$= 5 + 8 + 1$$

$$= 14$$

Sifat-sifat Imajiner *Outer Product*

- Kuadratkan *outer product* dari vektor-vektor basis satuan:

$$
\begin{aligned}
(e_1 \wedge e_2)^2 &= (e_1 \wedge e_2)(e_1 \wedge e_2) \\
&= e_1 \underbrace{e_2 e_1}_{-e_1 e_2} e_2 \\
&= -e_1 e_1 e_2 e_2 \\
&= -e_1^2 e_2^2 \\
&= -1^2\, 1^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

- Jadi, $\boxed{(e_1 \wedge e_2)^2 = -1}$ $\rightarrow$ mirip dengan imajiner $i^2 = -1$
- Aljabar Geometri memiliki hubungan dengan bilangan kompleks, bahkan juga dengan quaternion, dan dapat melakukan rotasi pada ruang vektor dimensi *n*.

Pseduoscalar

- Elemen-elemen aljabar di dalam aljabar geometri:

  skalar $\rightarrow$ grade-0

  vektor $\rightarrow$ grade-1

  bivector $\rightarrow$ grade-2

  trivector $\rightarrow$ grade-3

  dst

- Di dalam setiap aljabar (aljabar skalar, aljabar vektor, aljabar bivector, dst), elemen paling tinggi dinamakan *pseudoscalar* dan *grade-nya* diasosiasikan dengan dimensi ruangnya.
- Contoh: - di R^2 elemen *pseudoscalar* adalah *bivector* $e_1 \wedge e_2$ dan berdimensi 2.

  - di R^3 elemen *pseudoscalar* adalah *trivector* $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

Rotasi dengan *Pseudoscalar*

- *Pseudoscalar* dapat digunakan sebagai *rotor* (penggerak rotasi).
- Misalkan *pseudoscalar* di R^2 dilambangkan dengan I, jadi

$$I = e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2 = e_{12}$$

- Perkalian vektor satuan e_1 dan e_2 dengan I:

$$e_1 I = e_1 e_{12} = e_1 e_1 e_2 = e_1^2 e_2 = (1)e_2 = e_2$$

$$e_2 I = e_2 e_{12} = e_2 e_1 e_2 = e_2(-e_2 e_1) = -e_2^2 e_1 = -(1)e_1 = -e_1$$

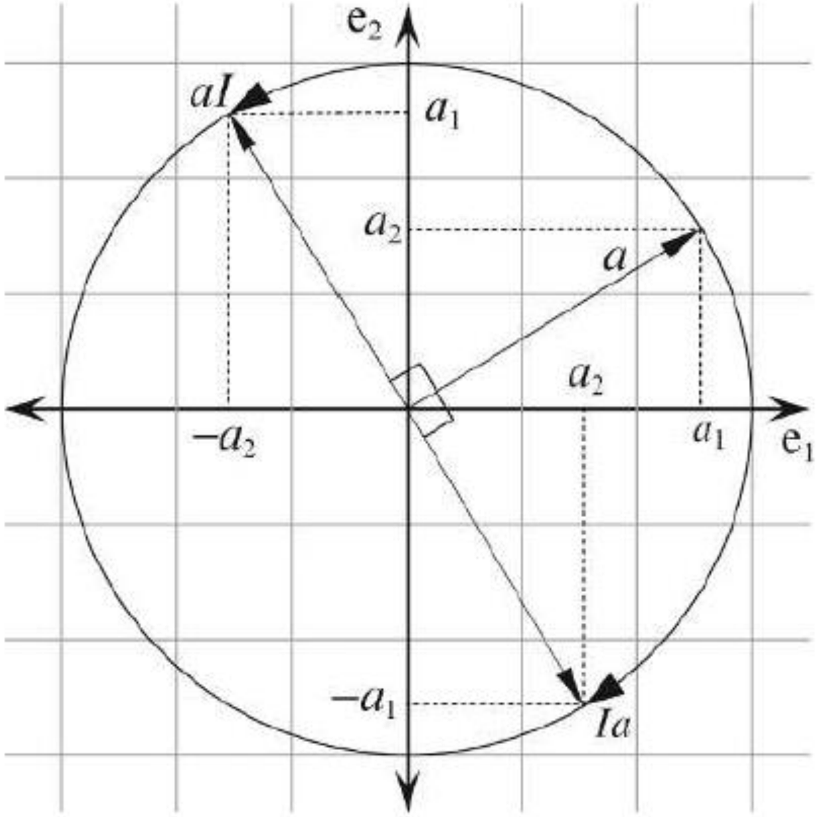
$$-e_1 I = -e_1 e_{12} = -e_1 e_1 e_2 = -e_1^2 e_2 = -(1)e_2 = -e_2$$

$$-e_2 I = -e_2 e_{12} = -e_2 e_1 e_2 = -e_2(-e_2 e_1) = e_2^2 e_1 = (1)e_1 = e_1$$

- Perkalian vektor a = a_1e$_1$ + a_2e$_2$ dengan I:

$$
\begin{aligned}
aI &= a\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 \\
&= (a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2)\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 \\
&= a_1\mathrm{e}_1^2\mathrm{e}_2 + a_2\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 \\
&= a_1\mathrm{e}_2 - a_2\mathrm{e}_2^2\mathrm{e}_1 \\
&= -a_2\mathrm{e}_1 + a_1\mathrm{e}_2
\end{aligned}
$$

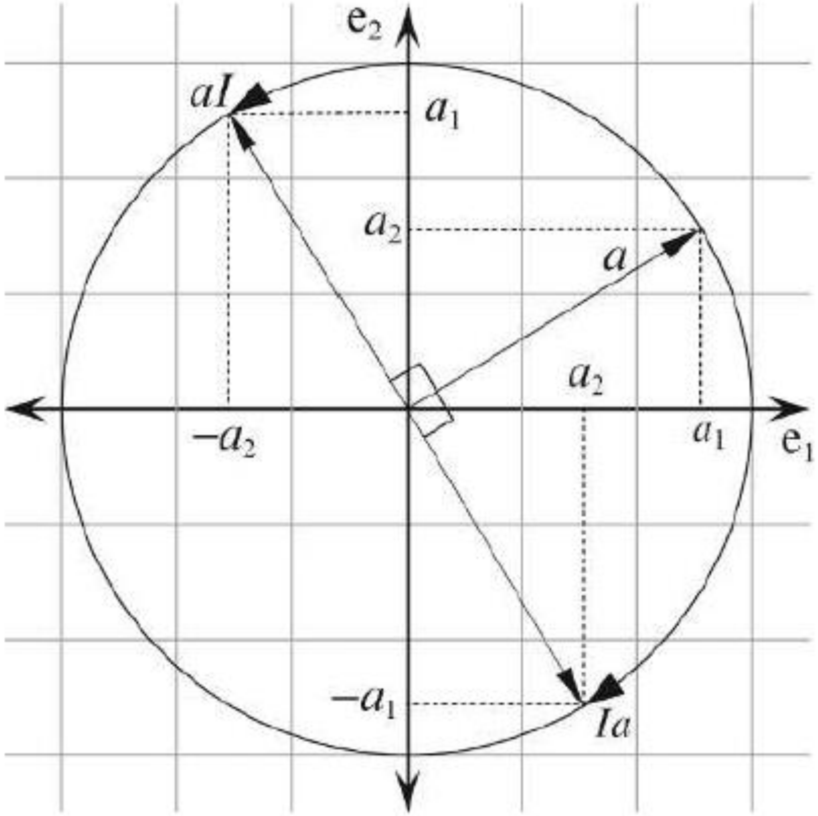
yang sama dengan memutar vektor sejauh 90 derajat berlawanan arah jarum jam.



- Perkalian vektor *I* dengan $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$:

$$\begin{aligned} Ia &= e_1 e_2 a \\ &= e_1 e_2 (a_1 e_1 + a_2 e_2) \\ &= a_1 e_1 e_2 e_1 + a_2 e_1 e_2^2 \\ &= -a_1 e_2 + a_2 e_1 \\ &= a_2 e_1 - a_1 e_2 \end{aligned}$$

yang sama dengan memutar vektor sejauh 90 derajat searah jarum jam.



- Jadi,

$$aI = -Ia$$

- Perkalian vektor dengan *pseudoscalar* tidak komutatif.

TABLE 8.1

	Products in $\mathbb{R}^2$		
Type	Product	Absolute Value	Notes
inner	$e_1 \cdot e_1$	1	$e_2 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_1$
outer	$e_1 \wedge e_1$	0	$e_2 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_1$
geometric	e_1^2	1	$e_2^2 = e_1^2$
			$e_1 I = -I e_1$
inner	$e_1 \cdot e_2$	0	$e_2 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2$
outer	$e_1 \wedge e_2$	1	$e_1 \wedge e_2 = -(e_2 \wedge e_1)$
geometric	$e_1 e_2$	1	$e_{12} = -e_{21}$
			$e_{12} = I$
			$I^2 = -1$
inner	$a \cdot a$	$\| a \|^2$	
outer	$a \wedge a$	0	
geometric	a^2	$\| a \|^2$	
inner	$a \cdot b$	$\| a \| \| b \| \cos\theta$	$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$
		$a_1 b_1 + a_2 b_2$	
outer	$a \wedge b$	$\| a \| \| b \| \sin\theta$	$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$
		$a_1 b_2 - a_2 b_1$	$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2$
geometric	ab	$\| a \| \| b \|$	$ab = a \cdot b + a \wedge b$
			$aI = -Ia$

Hubungan antara vektor, bivector, dan bilangan kompleks

- Diberikan vektor $a = a_1e_1 + a_2e_2$ dan $b = b_1e_1 + b_2e_2$ di R^2, maka

$$
\begin{aligned}
ab &= (a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) \\
&= a_1b_1e_1^2 + a_1b_2e_{12} + a_2b_1e_{21} + a_2b_2e_2^2 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2e_{12} - a_2b_1e_{12} \\
&= \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2)}_{a \cdot b} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)e_{12}}_{a \wedge b} \\
&= \underbrace{(a_1b_1 + a_2b_2)}_{\text{skalar}} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)I}_{\text{bivector}}
\end{aligned}
$$

- Perhatikan bahwa

$$ab = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)I$$

ekivalen dengan bilangan kompleks Z = p + qi.

- Jadi, kita dapat membentuk bilangan yang ekivalen dengan bilangan kompleksZ yang dibentuk dengan mengkombinasikan skalar dengan *bivector*:

$$Z = a_1 + a_2\mathrm{e}_{12} = a_1 + a_2I$$

yang dalam hal ini a_1 adalah bagian riil dan a_2 bagian imajiner.

- Vektor a dapat dikonversi menjadi bilangan kompleks Z sebagai berikut. Diberikan vektor a adalah $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$, maka

$$e_1 a = e_1(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1 e_1^2 + a_2 e_1 e_2 = a_1 + a_2 I$$

Jadi,

$$\boxed{e_1 a = Z}$$

- Kalau urutan perkaliannya dibalik sebagai berikut:

$$a e_1 = (a_1 e_1 + a_2 e_2) e_1 = a_1 e_1^2 + a_2 e_2 e_1 = a_1 - a_2 I$$

maka hasilnya adalah bilangan kompleks sekawan (conjugate) $\bar{Z}$.

$$\boxed{a e_1 = \bar{Z}}$$

Soal Latihan Mandiri

1. (Soal UAS 2018)

Diberikan tiga buah vektor:

$$
\begin{aligned}
a &= 2e_1 + e_2 + e_3 \\
b &= 3e_1 + 5e_2 - 2e_3 \\
c &= -e_1 + 2e_2 - e_3
\end{aligned}
$$

hitunglah :

1). $a(b \wedge c)$ 2). $a \cdot (b \wedge c)$ 3). $a(b + c)$

2. (Soal UAS 2019)

Jika $I_n = e_{123\ldots n}$, adalah *pseudoscalar* di $\mathbb{R}^n$, tuliskan ekspresi berikut dalam bentuk yang paling sederhana:

1). $I_1 I_2 I_3$ 2). $e_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ 3). $(I_3)^4 (I_2)^2 I_3 I_2$

3. (Soal UAS 2018)

Misalkan a adalah sebuah vektor $5e_1 - 2e_2$. Bagaimana cara merotasikan vektor a searah jarum jam sebesar 90° dengan *pseudo-scalar*. Tentukan bayangan a (misalkan a').